

①. Qu'est-ce que la stabilité des points d'équilibre pour un système autonome ?
Comment l'étudie-t-on ?

Def : Équilibre = $x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0) = 0$.

- Équilibre stable : Pour tout voisinage V de x_0 , \exists un voisinage U de x_0 t.q. $\forall x \in U, \phi_t(x) \in V \forall t \geq 0$
- instable : pas stable.
- asymptotiquement stable : stable et $\exists V$ voisinage de x_0 dans $\Omega, \forall x \in V, \phi_t(x)$ défini $\forall t \geq 0$ et $\phi_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} x_0$.

Fonction de Lyapunov, cela ev.

Stabilité et instabilité en première approximation. } voir dev.

→ cas linéaire $y' = x^3$ et $y' = -x^3$

② Comment approche-t-on la solution d'une EDO ? Que signifie CV de la méthode numérique ?

voir autre feuille pour les déf. $y' = f(y)$.

Ex : Euler explicite : $y_{n+1} = y_n + h f_n$ où $f_n = f(t_n, y_n)$, $t_n = t_0 + nh$.

Ex : Euler implicite : $y_{n+1} = y_n + h f_{n+1}$

Ex : Crank-Nicolson : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f_n + f_{n+1})$.

Ex : Runge-Kutta : $y_{n+1} = y_n + h F(t_n, y_n, h; f)$, $n \geq 0$.

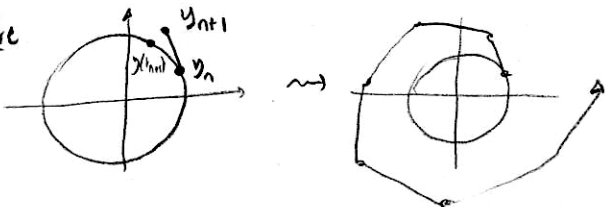
avec $F(t_n, y_n, h; f) = \sum_{i=1}^s b_i K_i$, $K_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j)$ $i=1, \dots, s$.

Meilleur compromis entre s et l'ordre : RK4. Par exemple :

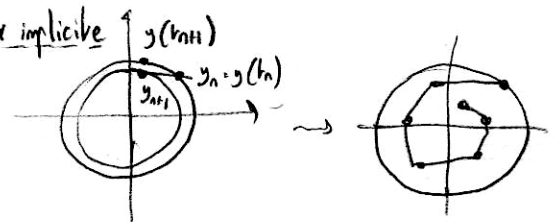
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad \begin{cases} K_1 = f_n \\ K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1) \\ K_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_2) \\ K_4 = f(t_{n+1}, y_n + h K_3) \end{cases}$$

Aff : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Euler explicite



Euler implicite



Point milieu : coup de chance
 (conserve hamiltonien)

RK4 : super précis mais ne conserve pas l'hamiltonien.

Ex: Stabilité du schéma d'Euler explicite -

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \\ z_{n+1} = z_n + h f(t_n, z_n) + \varepsilon_n \end{cases} \Rightarrow \|y_{n+1} - z_{n+1}\| \leq (1 + C_T h) \|y_n - z_n\| + \|\varepsilon_n\|$$

$$\|y_n - z_n\| \leq (1 + C_T h)^n \|y_0 - z_0\| + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + C_T h)^{n-1-k} \|\varepsilon_k\|$$

$$\text{Or } (1 + C_T h)^n \leq (1 + C_T h)^N \leq (1 + C_T h)^{T/h} \leq e^{TC_T}$$

$$\text{D'où } \|y_n - z_n\| \leq C_T (\|y_0 - z_0\| + \sum_{k=0}^n \|\varepsilon_k\|) \quad \text{rem: sinon Gronwall discret.}$$

Ex: Consistance du schéma d'Euler implicite

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + O(h^2) \\ f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = f(t_n, y(t_n)) + O(h) \end{cases} \Rightarrow \text{consistant d'ordre 1}$$

③ Comment calcule-t-on une valeur approchée d'une intégrale ? Quel est le lien avec l'interpolation polynomiale ?

Cadre: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.

Def (quadrature élémentaire): Pour $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ on définit la formule de quadrature élémentaire $I_n(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$. Erreur: $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$

Lien avec l'interpolation: $I_n(f) = \int_a^b f_n(x) dx$ où f_n simple à intégrer: ex polynôme d'interpolation alors $I_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x) dx}_{\omega_i}$. Quadrature exacte à l'ordre r lorsque $E_n(f) = 0$ pour $f \in \mathbb{P}_r$.

Def (quadrature composée): $m \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{b-a}{m}$, $j \in \{0, \dots, m-1\}$, $k \in \{0, \dots, n\}$, $\alpha_k^{(j)} \in \mathbb{R}$, $x_k^{(j)} \in [a+jh, a+(j+1)h]$. $I_{n,m}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(j)} f(x_k^{(j)})$. $E_{n,m}(f) = I(f) - I_{n,m}(f)$

Ev: voir 236.

Prop (thm de la moyenne discret): $u \in C^0([a, b])$, δ_j s+1 constantes de même signe - $\exists \gamma \in [a, b]$ tq $\sum_{j=0}^s \delta_j u(x_j) = u(\gamma) \sum_{j=0}^s \delta_j$.

Preuve: $\mu_m = \min u$, $\mu_M = \max u$. $\mu_m \sum_{j=0}^s \delta_j \leq \sum_{j=0}^s \delta_j u(x_j) \leq \mu_M \sum_{j=0}^s \delta_j$ - Ici à $U(n) = u(x) \sum_{j=0}^s \delta_j$.

Intégration de Gauss-

Pour $w = w(x)$ une fonction poids sur \mathbb{R} (i.e. > 0 et intégrable),

Déf (polynômes orthogonaux). Orthonormalisé de $1, x, \dots$ pour L^2_w .

$$I_w(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x) dx, \quad I_{n,w}(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i), \quad E_{n,w}(f) = I_w(f) - I_{n,w}(f).$$

Intérêt: meilleur degré d'exactitude en choisissant les bons points d'interpolation (racines des polynômes orthogonaux) -

Ex: $w(x) = 1_{[a,b]}(x)$. \rightarrow polynômes de Legendre: n racines réelles (x_i) distinctes dans $[a,b]$

Si f polynôme: on écrit la division euclidienne $f = p q_n + r$ où $\deg r \leq n-1$

Alors $f(x_i) = r(x_i)$ et:

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^b p(x) q_n(x) dx}_{=0 \text{ si } \deg p \leq n-1} + \int_a^b r(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b r(x) dx \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \sum_{i=1}^n r(x_i) \alpha_i$$

\rightarrow exacte de degré $\leq 2n-1$.

$$\begin{aligned} \text{Erreur: } \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \right| &\leq \int_a^b |f-p| dx + \left| \int_a^b p dx - \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha_i \right| \\ &\leq \dots \leq 2(b-a) \|f-p\|_{\infty} \quad \text{pour tout } p \in \mathcal{P}_{n-1}. \end{aligned}$$

④ Comment résoudre un problème d'optimisation ? (théorie et pratique) -

voir 218, 219, 253.

$f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \ C^0$. On cherche x^* tq $f(x^*) = \min_{x \in A} f(x)$ (min global)
| (ou min local).

Thm: Si $K \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $f: K \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si f est convexe alors un min local est global.
- Si f strict-convexe, il existe au plus un min global.

Si A ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1$ tq f admet un min local en x^* , alors $\nabla f(x^*) = 0$

Méthode de gradient à pas fixe: $x_{n+1} = x_n + p w_n$, $w_n = -\nabla f(x_n)$.

Méthode de gradient à pas optimal -

$$x_{n+1} = x_n - \rho_n \nabla f(x_n) \quad \text{où } \rho_n \text{ minimise } f(x_n - \rho \nabla f(x_n)).$$

Sous-contraintes - minimiser f sur un convexe fermé K .

$$x_{n+1} = P_K(x_n + \rho u_n).$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}.$$

Thm (extrema liés). Si x^* est solution de $f(x^*) = \min_{x \in A} f(x)$ et

$(\nabla g_1(x^*), \dots, \nabla g_p(x^*))$ libre alors $\exists (q_1^*, \dots, q_p^*) \neq 0$.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^p q_i^* \nabla g_i(x^*) = 0.$$

⑤ L'équation de transport linéaire 1D : existence, unicité, approximation numérique -

$$\begin{cases} \partial_t u + b(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d \\ u(t=0) = u^0 \text{ donnée.} \end{cases} (*)$$

* Cas régulier : on suppose $b \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ globalement lipschitzien en x
 par exemple $\forall T > 0, \exists C(T), \sup_{\substack{t \in [-T, T] \\ x \in \mathbb{R}^d}} \left\| \frac{Db}{Dx}(t, x) \right\| \leq C_T$

ou plus faible : $\forall T > 0, \forall R > 0, \exists M_1(T, R), \exists M_2(T)$ tels que :

$$\begin{cases} |b(t, x) - b(t, y)| \leq M_1(T, R) |x - y| & \text{pour tout } |t| \leq T \text{ et } |x|, |y| \leq R. \\ |b(t, x)| \leq M_2(T) (1 + |x|), & |t| \leq T, x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Déf : (caractéristiques) :
$$\begin{cases} \dot{X}(t; t_0; y) = b(t, X(t, t_0; y)) \\ X(t_0, y) = y \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Thm Sous ces hypothèses et $u^0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$
 qui est constante le long des caractéristiques : $u(t, X(t, 0; y)) = u^0(y)$
 $\forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^d$.

Preuve : $\frac{d}{dt} u(t, X(t, 0; y)) = \dots$ + C^1 -régularité du flot : $\frac{d}{dt} D_y X(t, y) = D_x b(t, X(t, 0; y)) D_y X(t, y)$
 $D_y X(0, y) = I_d$.

Propriétés : (i) Propagation à vitesse finie :

(ii) Propagation des singularités : u a la même régularité que u^0 .
 (iii) Principe du maximum : (même conservation des normes L^p si $\operatorname{div} b = 0$).

Déf (solution faible) : u est une solution faible de (*) lorsque :

$$\left[\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t=0, x) u^0(x) dx + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) \left\{ \partial_t \varphi + \operatorname{div}(b \varphi) \right\}(t, x) dx dt = 0 \right]$$

Thm Si $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (on fait L^1_{loc}) il existe une unique solution faible $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$
 $[u \in C(\mathbb{R}_+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^d))$ et elle est constante le long des caractéristiques]

Plus généralement : $\partial_t h + a \partial_x h + b h = g$ - On pose $h(t, x) = f(t, X(t, 0, x))$

on a $\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = g(t, X(t, 0, x)) - b(t, X(t, 0, x)) h \Rightarrow h(t, x) = h(0, x) \exp\left(\int_0^t b(s, X(s, 0, x)) ds\right) + \dots$

⑥ Équations de Laplace et de la chaleur : existence, unicité, approximation numérique

• Chaleur périodique : séries de Fourier.

• Chaleur dans \mathbb{R}^d :
$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u(t, x), & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(t=0, x) = u^0(x) \end{cases}$$

Thm : Si $u^0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ solution.

Preuve : $\partial_t \hat{u} = -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} \Rightarrow \hat{u}(t, \xi) = e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \hat{u}_0$
 $\Rightarrow u(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t} \hat{u}_0 \right) = S(t) u_0.$

Rem : $S(t) u_0 = K(t) * u^0$ où $K(t)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-4\pi^2 |x|^2 t}$
 $\left[\mathcal{F} \left(e^{-\alpha |x|^2} \right) = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} |\xi|^2} \right]$

Après : $\|S(t) u^0\|_{H^s} \leq \|u^0\|_{H^s}$ donc s'étend sur $S(t) : H^s \rightarrow H^s$.

On peut montrer que si $u^0 \in H^s$ alors $S(t) u^0 \in C(\mathbb{R}; H^s)$ est l'unique solution au sens des distributions.

Remarque : Si $u^0 \in C^p$, $S(t) u^0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Remarque : Pas stable

Équation de Laplace : (dimension 1).

Déf : $H^1(0,1) = \{u \in L^2(0,1), u' \in L^2(0,1)\}$ Hilbert muni de $\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_0^1 uv + \int_0^1 u'v'$

Prop : Si $u \in H^1(0,1)$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}, u(x) = \alpha + \int_0^x u'(t) dt$ p.p. Coro : $H^1 \subset C^0([0,1])$

Déf : $H_0^1(0,1) = \{u \in H^1(0,1), u(0) = u(1) = 0\}$ (fermeture de $C_c^1(0,1)$).

$H_0^1(0,1)$ dense dans $H^1(0,1)$.

Thm (Poincaré) : Soit $u \in H_0^1(0,1)$, alors $\|u\|_{L^2} \leq c \|u'\|_{L^2}$

Formulation variationnelle

ex : $\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad x \in \mathcal{V} = \mathcal{H}_0^1(0,1)$
 $\Rightarrow \int_0^1 u'v' = \int_0^1 f v$ i.e. $a(u,v) = \ell(v)$

où $a(u,v) = \int_0^1 u'v'$ et $l(v) = \int_0^1 f v$.

• Schwarz : $|l(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}$

Riesz donne une solution à
$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Généralisation :
$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (SL)$$

$a(u,v) = \int_0^1 p u'v' + \int_0^1 q u v$, $l(v) = \int_0^1 f v$.

Prop : $p \in C^1([0,1])$, $q \in C^0([0,1]) \Rightarrow a$ est définie sur H^1 .

Formulation variationnelle : (FV)
$$\begin{cases} u \in H_0^1(0,1) \\ \forall v \in H_0^1, a(u,v) = l(v) \end{cases}$$

Prop : u solution $C^2([0,1]) \Leftrightarrow u$ solution de (FV).

Preuve : \Rightarrow ok \Leftarrow d'abord, $-(pu')' + qu = f$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$ puis si $p(x) \geq \alpha > 0$, $u \in C^2$.

Thm (Lax-Milgram). Soit H un espace de Hilbert. Soit a bilinéaire C^0 sur H , Soit l une forme linéaire C^0 sur H .

On suppose que a est coercive : $\exists \alpha > 0, \forall u \in H, a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$

Alors $\exists ! u \in H$ tq $\forall v \in H, a(u,v) = l(v)$

Ici $H_0^1(0,1)$ fermé de H^1 Hilbert et plonqué $\Rightarrow a$ coercive car :

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_0^1 p u'^2 + \int_0^1 q u^2 \geq \alpha \int_0^1 u'^2 = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 u'^2 + \frac{\alpha}{2} \|u'\|_2^2 \\ &\geq \frac{\alpha}{2} \|u'\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2c^2} \|u\|_2^2 \geq \min(\dots) \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Neumann homogène : on travaille dans H^1 .

Neumann inhomogène : on modifie l .

⑦ Équation des ondes 1D : existence, unicité, approximation numérique -

* Transport x2 :
$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u(t, x) = + c^2 \partial_{xx}^2 u(t, x), & x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = g(x); & \partial_t u(0, x) = h(x) \end{cases}$$

$$(\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2) = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x)$$

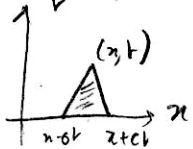
Analyse: si $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solution, $v(t, x) = (\partial_t + c \partial_x)u(t, x)$ satisfait une équation de transport :
$$\begin{cases} (\partial_t - c \partial_x)v = 0 \\ v(0, x) = (h - cg')(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t, x) = (h - cg')(x + ct)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(t, x) &= g(x - ct) + \int_0^t v(s, x - c(t-s)) ds \\ &= g(x - ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} (h - cg')(\sigma) \frac{d\sigma}{2c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t, x) = \frac{g(x-ct) + g(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(\sigma) d\sigma$$

Thm : si $g \in C^2, h \in C^1$ il y a une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.



* Par analyse de Fourier. Dans $C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$:

$$\partial_{tt}^2 \hat{u}(t, \xi) = -4\pi^2 c^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) \Rightarrow \hat{u}(t, \xi) = \hat{g}(\xi) \cos(2\pi c |\xi| t) + \hat{h}(\xi) \frac{\sin(2\pi c |\xi| t)}{2\pi c |\xi|}$$

conservation de l'énergie : $\|\partial_t u\|_{L^2}^2 + c^2 \|u\|_{L^2}^2$

* Pb périodique : $n \in \mathbb{Z}$: $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t) e^{2\pi i n x}$ -- comme d'habitude

unicité : énergie -

* inhomogène :
$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ \partial_t u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_t u \\ c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \dots \text{formule} + \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy ds$$

Nomérique :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - c^2 \partial_{xx}^2 u = 0, & t > 0, x \in]0,1[\\ u(t, x+1) = u(t, x) \\ u(0, x) = g(x) & x \in]0,1[\\ \partial_t u(0, x) = h(x) & x \in]0,1[\end{cases}$$

schéma centré : $\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$

$u_j^0 = g(x_j) \quad u_j^1 = u_j^0 + \Delta t h(x_j) \rightarrow u_j^{n+1} = u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{c^2 (\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$

Taylor \Rightarrow consistant d'ordre 2 en temps et en espace.

lemme (conservation de l'énergie discrète) : $E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} (A u^n, u^{n+1})$

où $(A u^n)_j = - \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$ \uparrow est ind de n .

\rightarrow stabilité sous condition CFL $\Leftrightarrow \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1.$

$\|u^n\| \leq M t^n + \|u^0\|.$

⑧ Fourier.

schéma : $\begin{cases} \partial_t u - c \partial_{xx}^2 u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+^x \times]0,1[\\ u(0, x) = u_0(x) & \text{pour } x \in]0,1[. \text{ + périodicité.} \end{cases}$

$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{-u_{j-1}^n + 2u_j^n - u_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} = 0, \quad \Delta = \frac{1}{N+1}, \quad u_0^n = u_{N+1}^n$

$\forall n \in \mathbb{R}, \quad u^n(x) = u_j^n \text{ si } x \in [x_j - \frac{1}{2}\Delta x, x_j + \frac{1}{2}\Delta x].$

$\hat{u}^n(k) = \int_0^1 u^n(x) e^{-2i\pi kx} dx \rightarrow \hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k) \left[1 + c \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (\cos(2\pi kx) - 1) \right]$

$\hat{u}^{n+1}(k) = \hat{u}^n(k) \left[1 - \frac{4c \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi kx) \right].$

$\int_0^1 |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2 \quad \forall | \cdot | \leq 1 \Rightarrow \frac{2c \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1.$

⑨ Quelles sont les difficultés rencontrées pour la résolution de systèmes linéaires ?
Quelles sont les méthodes disponibles ?

* Méthodes directes $Ax = b$.

idée : se ramener à une matrice facile à inverser.

ex : Matrice triangulaire \rightarrow résolution "par remontée" en $O(n)$ opérations.

Gauss : Thm : Soit A une matrice carrée inversible ou non. Il existe une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire sup-

Algorithme : Pour $p=1$ à n faire :

- si $a_{pp} \neq 0$ annuler a_{jp} , $j > p$ (multiplication par $T_{jp}(-\frac{a_{jp}}{a_{pp}})$)
 - si $a_{pp} = 0$ permuter $L_p \leftrightarrow L_j$, $j > p$ tq $a_{jp} \neq 0$ (mult. par P_{jp})
- Si une telle ligne n'existe pas, passer à l'étape suivante.

[en pratique : faire les opérations simultanément sur A et b et résoudre $Tx = Mb$]

Problèmes : division par des pivots trop petits (no strategies pour choisir le pivot)
 . Plusieurs systèmes à résoudre avec la même matrice (voir LU).

Complexité : $\frac{2n^3}{3}$ opérations (presque optimal ?)

LU Thm : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que tous les mineurs principaux soient non nuls. Il existe un unique couple (L, U) avec U triang sup, L triang inf ayant une diagonale de 1 tq $A = LU$

Ainsi, $Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases}$.

Algorithme (no Gauss sans permuter)

Pour $k=1$ à $(n-1)$.

calcul $\left. \begin{array}{l} L \\ U \end{array} \right\} \begin{cases} L(k+1:n, k) = A(k+1:n, k) / A(k, k) & [\text{pivot non nul}], \\ U(k, k:n) = A(k, k:n). \end{cases}$

mise à jour $A \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } j = (k+1):n \\ \text{Pour } i = (k+1):n \\ A(i, j) = A(i, j) - L(i, k) * A(k, j); \end{array} \right.$

$U(n, n) = A(n, n).$

Intérêts: On garde LU même s'il y a plusieurs systèmes -
 • Préserve la structure bande - • Choleski si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $A = BB^T$. trous inf

Complexité: $O(n^3)$ mais si matrice tri-diagonale on peut résoudre en $O(n)$.

QR Thm: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ - Il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire R telles que $A = QR$. On peut faire en sorte que les éléments diagonaux de R soient tous ≥ 0 - si A est inversible, la factorisation $A = QR$ est unique -

Ainsi $Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^*b$.

[En fait ça marche aussi avec des matrices rectangulaires et R de la forme $\begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}$]

Preuve/algo: Les colonnes de Q sont l'orthonormalisation de Gram-Schmidt de celles de A :

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11} a_1 \\ q_2 &= c_{12} a_1 + c_{22} a_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} a_1 = r_{11} q_1 \\ a_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2 \\ \vdots \\ a_n = r_{1n} q_1 + \dots + r_{nn} q_n \end{cases} \quad \checkmark \text{ ev. } x(-1) \quad \square$$

Householder: Si $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $H(v) = I_n - 2 \frac{vv^*}{\|v\|^2}$. \rightarrow unitaire et hermitienne

$\rightarrow y = H(v)x$ est la réflexion \perp de x par rapport au plan v^\perp

\rightarrow Si $v = x \pm \|x\|_2 e_n$ alors $H(v)x$ a toutes ses composantes nulles sauf la n^e .
 $\{n^e \text{ vaut } \pm \|x\|_2$.

Algorithme: $A = (a_1 \dots a_n)$

$$H_1 = H(a_1 \pm \|a_1\| e_1) \Rightarrow A_1 = H_1 A = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & A^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & H^{(2)} & \end{pmatrix} \text{ avec } H^{(2)} \text{ tq } H^{(2)} A^{(1)} = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & A^{(2)} \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

$$\rightarrow R = A_n = H_n \dots H_1 A, \quad Q = H_1^T \dots H_n^T.$$

Intérêt: Préserve le conditionnement.

Complexité: double de celle de Gauss.

⑩ Comment résoudre un problème aux valeurs propres? Difficultés et méthodes.

Méthode QR.

Thm: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des vap réelles tq $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n|$. Alors la suite $A^{(1)} = A$; $A^{(1)} = Q^{(1)} R^{(1)}$; $A^{(2)} = R^{(1)} Q^{(2)}$; $A^{(k)} = Q^{(k-1)} R^{(k)}$ converge vers une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les vap de A .

La convergence dépend des rapport entre les modules des vap.

Localisation des valeurs propres.

Thm (Gershgorin) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n R_i$ où :

$R_i = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}$ cercle de Gershgorin.

Preuve: $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow A - \lambda I_n$ non inversible.

$\Rightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas à diagonale dominante.

$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ □

Rem: Comme A^T a le même spectre, les vap sont même dans l'intersection de deux réunions de cercles.

Méthode de la puissance.

(Allure) - $\lambda_1 > 0$.

Pour $k \geq 1$, résoudre $y_k = A x_{k-1}$, $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$.
 $\rightarrow x_k$ vap approchée de A de vap $\|y_k\|$.

* La plus grosse vap.

Thm: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable avec des vap tq:

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. On considère la suite:
 $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n, \|q^{(0)}\|=1$; $z^{(k)} = A q^{(k-1)}$, $q^{(k)} = \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|}$; $v^{(k)} = \langle q^{(k)}, A q^{(k)} \rangle$.
 Alors $v^{(k)} \rightarrow \lambda_1$ et $q^{(k)}$ tend à s'aligner vers le vap x_1 , à vitesse $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^k$.

* La vap la plus proche de $p \in \mathbb{C}$: précis en remplaçant $A \leftarrow A - pI -$

$$A = \sum (\lambda_i + D_i) \pi_i \rightarrow A^k = (\lambda_n + D_n)^k \pi_n + \underbrace{(\quad)}_{p(1) < |\lambda_n|}^k \rightarrow O((\lambda_{n-1} + \varepsilon)^k).$$

hyp minimale : vap de g^d module unique.

(11) Comment résoudre numériquement un système d'équations non-linéaires ?

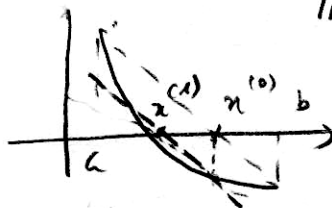
* En dimension 1

Cadre : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\alpha) = 0$ -

Def : Si $x_k \rightarrow \alpha$ on dit que la suite converge vers α à l'ordre $p \geq 1$
 L lorsque $\exists C > 0$, $\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|^p} \leq C$ pour tout $k \geq k_0$

Thm (méthodes) : On construit $x^{(k+1)} = x^{(k)} - g_k^{-1} f(x^{(k)})$, $k \geq 0$ -

• Corde : $g_k = g = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



convergence d'ordre 1 dès que $g^{-1} f'(\alpha) < 2$.

• Secante : $g_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$

convergence d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dès que $f'(\alpha) \neq 0$ et $x^{(0)}, x^{(-1)}$ proches de α .

• Newton : $g_k = f'(x^{(k)})$ $f \in C^2$

convergence d'ordre 2 dès que $f'(\alpha) \neq 0$ et $x^{(0)}$ proche de α .

si α d'ordre $m > 1 \rightarrow g_k = \frac{1}{m} f'(x^{(k)})$.

L'analyse de la convergence repose sur le thm de point fixe :

Thm (point fixe contractant) Soit $\phi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ C^1 , $\exists K < 1$, $|\phi'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$
 Alors ϕ a un unique point fixe α dans $[a, b]$ et la suite
 $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ converge vers α avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{x^{(n)} - \alpha} = \phi'(\alpha)$
 De plus, si $\phi \in C^{p+1}(J)$ où J vois de α et si $\phi^{(i)}(\alpha) = 0$ et $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$
 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{(n+1)} - \alpha}{(x^{(n)} - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}$ (CV d'ordre $p+1$) -

[Repose sur Taylor].

En dimension supérieure.

Thm (Newton). Soit $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 (dans un convexe qui contient $x^* \in \mathbb{R}^n$ tq

$F(x^*) = 0$) - On suppose: $\exists R, C, L > 0$ tq

• $DF(x^*)^{-1}$ existe et $\|DF(x^*)^{-1}\| \leq C$.

• $\forall x, y \in B(x^*, R)$, $\|DF(x) - DF(y)\| \leq L \|x - y\|$

Alors $\exists r > 0$ tq $\forall x^{(0)} \in B(x^*, r)$ la suite $x^{(n+1)} = x^{(n)} - DF(x^{(n)})^{-1} F(x^{(n)})$
 est bien définie et converge vers x^* avec:

$$\|x^{(n+1)} - x^*\| \leq CL \|x^{(n)} - x^*\|^2 \quad (*)$$

Preuve: Par récurrence montrer que $x^{(n+1)} \in B(x^*, r)$ où $r = \min(R, \frac{1}{2CL})$ et (*)
 on le fait $0 \rightarrow 1$ c'est pareil après.

$$\|DF(x^*)^{-1} DF(x^{(0)}) - I\| = \|DF(x^*)^{-1} (DF(x^{(0)}) - DF(x^*))\| \leq CL r \leq \frac{1}{2} \text{ donc}$$

$DF(x^*)^{-1} DF(x^{(0)})$ est inversible donc $DF(x^{(0)})$ aussi de plus:

$$\|DF(x^{(0)})^{-1}\| \leq \|DF(x^*)^{-1}\| \|DF(x^{(0)}) DF(x^*)\| \leq \frac{\|DF(x^*)^{-1}\|}{1 - \|\dots - I\|} \leq 2C$$

$$x^{(1)} - x^* = x^{(0)} - x^* - DF(x^{(0)})^{-1} [F(x^{(0)}) - F(x^*)]$$

$$\|x^{(1)} - x^*\| \leq \|DF(x^{(0)})^{-1}\| \|F(x^*) - F(x^{(0)}) - DF(x^{(0)})(x^* - x^{(0)})\|$$

$$\text{Or } F(x^*) = F(x^{(0)}) + \int_0^1 DF((1-s)x^* + sx^{(0)})(x^* - x^{(0)}) ds$$

Donc

$$\begin{aligned} \|F(x^*) - F(x^{(0)}) - DF(x^{(0)})(x^* - x^{(0)})\| &\leq \int_0^1 \|DF(s \cdot + (1-s) \cdot) - DF(x^{(0)})\| \|x^* - x^{(0)}\| ds \\ &\leq L \|x^* - x^{(0)}\|^2 \times \int_0^1 s ds = \frac{L}{2} \|x^* - x^{(0)}\|^2 \end{aligned}$$

Donc $\|x^{(1)} - x^*\| \leq \frac{L}{2} \|x^* - x^{(0)}\|^2$.

Comme $\|x^{(0)} - x^*\| \leq \frac{1}{2CL}$ on a $\|x^{(1)} - x^*\| \leq \frac{1}{2} \|x^{(0)} - x^*\|$. \square

(12) C'est quoi les moindres carrés ? Dans quelles situations est-ce utile ?

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$, $b \in \mathbb{R}^m$ (système surdéterminé).

$$\Phi(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

Def $x^* \in \mathbb{R}^n$ est la solution du système linéaire $Ax = b$ au sens des moindres carrés lorsque $\Phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \Phi(x)$.

* Point de vue analyse convexe -

minimiser $J(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 - \frac{1}{2} \|c\|^2$

$$= \frac{1}{2} \langle A^T A x, x \rangle - \langle c, Ax \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle A^T A x, x \rangle - \langle A^T c, x \rangle$$

$$\begin{aligned} \Delta \quad x' &= \|x\|_w \\ \| \cdot \| &= \| \cdot \|_w \\ &\text{adjoint} \end{aligned}$$

Comme J convexe, l'ens des solutions coïncide avec l'ensemble des solutions de $\nabla J(x) = A^T A x - A^T c = 0$. (équations normales)
Lorsque $A^T A$ est définie positive, il y a une unique solution. En fait il y en a toujours une.

* Projection sur un convexe fermé: Le thm de projection sur $\text{Im}(A)$ convexe fermé entraîne l'existence d'une unique solution à $\tilde{x}^* \in \text{Im}(A)$, $\|\tilde{x} - b\|_2 = \inf_{\tilde{v} \in \text{Im}(A)} \|\tilde{v} - b\|_2$

→ ce pb a toujours une solution à savoir x^* tq $\tilde{x} = Ax^*$.

→ unicité ssi A injective ($\Rightarrow m \geq n$) ssi $A^T A$ définie.

Caractérisation : $\langle \tilde{u}^* - b, \tilde{v}^* \rangle = 0$, $\forall \tilde{v}^* \in \text{Im}(A)$.

$$\Leftrightarrow \langle Ax^* - b, Av \rangle = \langle A^T Ax^* - A^T b, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow A^T A x = A^T b \quad (\text{équations normales}).$$

* En pratique : on utilise la factorisation QR de A (robuste numériquement pour des raisons de conditionnement).

Thm : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$ de rang maximal. L'unique solution au sens des moindres carrés est $x^* = \tilde{R}^{-1} \tilde{Q}^T b$ où

$$A = \tilde{Q} \tilde{R}$$

$$\text{et } \boxed{A} = \boxed{\begin{array}{c|c} \tilde{Q} & \end{array}} \overset{\leftarrow n \rightarrow} \boxed{\begin{array}{c} \tilde{R} \\ \hline 0 \end{array}} \uparrow n$$

Systèmes linéaires -

* Méthodes itératives: $Au = b \Leftrightarrow u = Bu + c$: $u_{k+1} = Bu_k + c, k \geq 0$
 $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = u$ pour tout u_0 .

Thm (convergence): la méthode converge $\Leftrightarrow \rho(B) < 1 \Leftrightarrow \|B\| < 1$ pour au moins une norme $\|\cdot\|$

Preuve: $e_k = u_k - u = B^k e_0$ et utiliser les résultats généraux sur les normes matricielles

En particulier: pour toute norme $\|\cdot\|$, $\rho(B) \leq \|B\|$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists \|\cdot\|, \|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon$.
 ["presque diagonalisation"]. \square

Si $A = M - N$ avec M "facile à inverser": $B = M^{-1}N$; $c = b$ (splitting)

Méthode	$A = M - N$	Matrice $M^{-1}N$ de l'itération	itération $Mu_{k+1} = Nu_k + b$
Jacobi	$A = D - (E+F)$	$J := D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$
Gauß-Seidel	$A = (D-E) - F$	$\mathcal{L}_A = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation	$A \left(\frac{D}{\omega} - E \right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F \right)$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E \right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F \right)$	$\left(\frac{D}{\omega} - E \right) u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F \right) u_k + b$

$$\|e_k\| \leq \| (M^{-1}N)^k \| \|e_0\| \text{ et } \|B^k\|^{1/k} \rightarrow \rho(B) \Rightarrow \|B^k\| \leq (\rho(B) + \varepsilon)^k$$

Thm (GS): Si A hermitienne def pos, si $M^* + N$ est def pos alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Preuve: $M^{-1}N = I - M^{-1}A$ et pour $\|\cdot\| = \|\cdot\|_A$ on a $\|I - M^{-1}A\| = 1 - \|w\|_{M+N}^2 < 1, w = M^{-1}Av$

App: Si A hermitienne def. pos, si $0 < \omega < 2$ alors relax converge -

Preuve: $M^* + N = \frac{2-\omega}{\omega} D$

Thm: Sans hypothèse particulière, $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$ donc relax CV $\Rightarrow 0 < \omega < 2$.

Preuve: $\prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_\omega) = \det(\mathcal{L}_\omega) = \frac{\det\left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)}{\det\left(\frac{D}{\omega} - E\right)} = (1-\omega)^n$

Donc $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq \left| \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathcal{L}_\omega) \right|^{1/n} \geq |1-\omega|$.

Thm: Soit A tridiagonale (par blocs). Alors $\rho(\mathcal{L}_A) = \rho(J)^2$

Conséquence: Jacobi et Gauß-Seidel CV ou DV simultanément et GS est deux fois plus rapide que Jacobi.

Preuve: Soit $A(\mu) = \begin{pmatrix} b_1 & \mu c_1 \\ \mu a_2 & \ddots \\ & \ddots & \mu c_{n-1} \\ \mu a_n & b_n \end{pmatrix} = Q(\mu) A(1) Q(\mu)^{-1}$ où $Q(\mu) = \begin{pmatrix} \mu^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^n \end{pmatrix}$
 donc $\det A(\mu) = \det A(1)$

• Les vvp de J sont les zéros de $\det(D^{-1}(E+F) - \lambda I)$ donc aussi ceux de $\det(\lambda D - E - F)$

• Les vvp de \mathcal{L}_A sont les zéros de $\det(\lambda D - \lambda E - F) = q_{\mathcal{L}_A}(\lambda) \quad q_J(\lambda)$

• $q_{\mathcal{L}_A}(\lambda^2) = \lambda^n q_J(\lambda)$

Schémas numériques pour les EDO et EDP.

* Le cas des EDO.

$$(c) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , t \in [0, T] \quad T = Nh, \quad t_i = ih, \quad i \in \{0, \dots, N\} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

NOTATION : y_n approximation de $y(t_n)$.

Def (schéma numérique) $y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n, h)$ (implicite ou explicite)
 $\hookrightarrow \phi$ donné par le TFi

Def (consistance) Le schéma est consistant à l'ordre $q \geq 1$ lorsque toute solution $y(t)$ régulière de (c) vérifie : $y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \phi(t_n, y(t_n), h) + O(h^{q+1})$.

Def (stabilité) Le schéma est stable lorsqu'il existe $C_T > 0$ tq pour toutes suites (ε_n) et (y_n) tq $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \phi(t_n, y_n, h) \\ y_0 = y_0 \end{cases}$ et (z_n) tq $\begin{cases} z_{n+1} = z_n + h \phi(t_n, z_n, h) + \varepsilon_n \\ z_0 = z_0 \end{cases}$ on a $\max_{n=1, \dots, N} \|y_n - z_n\| \leq C_T (\|y_0 - z_0\| + \sum_{n=1}^N \|\varepsilon_n\|)$

Théorème Un schéma consistant d'ordre q et stable est convergent au sens \square $\exists C_T > 0$ tq $\forall h > 0, \max_{n=1, \dots, N} \|y_n - y(t_n)\| \leq C_T h^q$

Preuve : . Consistance $\Rightarrow y(t_{n+1}) = y(t_n) + h \phi(t_n, y(t_n), h) + \varepsilon_n$ où pour tout $n \leq N, \|\varepsilon_n\| \leq C_T h^{q+1}$

. stabilité $\Rightarrow \|y_n - y(t_n)\| \leq C_T (\underbrace{\|y_0 - y(t_0)\|}_{=0} + \sum_{n=1}^N \|\varepsilon_n\|) \leq C_T \cdot \frac{T}{h} h^{q+1} \quad \square$

* Le cas des EDP

"EDO en dimension infinie" $u_0(x)$ condition initiale, $x \in (0, 1)$.

NOTATION : $\Delta t > 0, \Delta x = \frac{1}{N+1}, (t_n, x_j) = (n \Delta t, j \Delta x), u_j^n$ approx de $u(t_n, x_j)$

Def (Schéma linéaire) $u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \phi(\Delta t, \Delta x, u^n)$ où ϕ linéaire.
 $\hookrightarrow u^{n+1} = A u^n$ où A opérateur linéaire sur les suites -

Def (consistance) Le schéma est dit consistant d'ordre p en espace et q en temps lorsque pour toute solution $u, \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\Delta t} - \phi(\Delta t, \Delta x, \{u(t_n, x_k)\}_n) = O(\Delta t^q \Delta x^p)$

Def (stabilité) Le schéma est dit stable en norme $\|\cdot\|_p$ (norme sur ℓ^p) lorsque $\forall T > 0, \exists C_T > 0, \sup_{n=0, \dots, \frac{T}{\Delta t}} \|u^n\|_p \leq C_T \|u^0\|_p$ discrétisation de la Ci sur $\{j \Delta x\}$

Lem : c'est équivalent à la stabilité pour les EDO en adoptant les notations de la définition et avec la norme $\|\cdot\|_p$. C'est encore équivalent à :

$$\forall T > 0, \exists C_T > 0, \forall n = 0, \dots, \frac{T}{\Delta t}, \|A^n\|_p \leq C_T$$

Thm (Lax) Un schéma consistant d'ordre $O(\Delta t^p + \Delta x^q)$ et stable en norme $\|\cdot\|_p$ est convergent en norme $\|\cdot\|_p$ au sens où : $\sup_{n=0, \dots, \frac{T}{\Delta t}} \|U^n - \{U(t_n, k\Delta x)\}_k\|_p \leq C_T (\Delta t^p + \Delta x^q)$

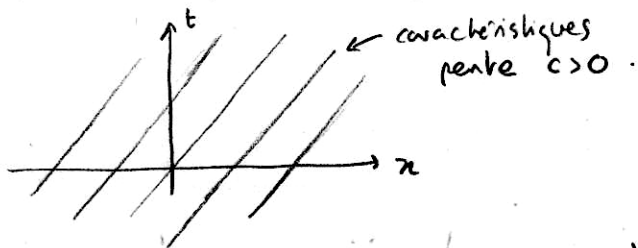
Preuve. On note $\tilde{U}_j^n = U(t_n, x_j)$. Consistance $\Rightarrow \tilde{U}^{n+1} = A \tilde{U}^n + \varepsilon_n$ où $\forall n=0, \dots, \frac{T}{\Delta t}, \varepsilon_n \leq C_T (\Delta t^p + \Delta x^q) \times \Delta t$

finalement, $U^n = A^n U^0$ et $\tilde{U}^n = A^n \tilde{U}^0 + A^{n-1} \varepsilon_1 + \dots + A \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ et $\tilde{U}^0 = U^0$

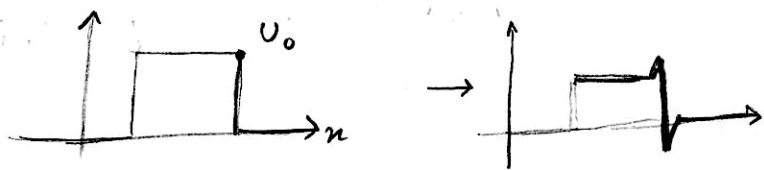
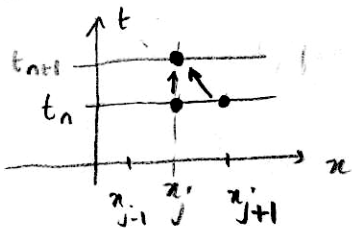
stabilité : $\|U^n - \tilde{U}^n\|_p \leq C_T \cdot n \cdot C_T (\Delta t^p + \Delta x^q) \times \Delta t \stackrel{n\Delta t \leq T}{\leq} C_T (\Delta t^p + \Delta x^q)$ \square

* Exemples pour l'équation de transport.

$$\begin{cases} \partial_t U + c \partial_x U = 0 \rightsquigarrow U(t, x) = U_0(x - ct) \\ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, U(t, x) \in \mathbb{R}, c = c^0 > 0. \text{ (vitesse de propagation } \rightarrow) \end{cases}$$



• Schéma downwind (décentré droit / aval) $U_j^{n+1} = U_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{j+1}^n - U_j^n)$



En fait $U_j^{n+1} = U_j^n (1 + \lambda) - \lambda U_{j+1}^n$ où $\lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$
combinaison non convexe : viole la pp du maximum -

• schéma centré : pareil en pire.

• schéma upwind (décentré gauche / amont) $U_j^{n+1} = U_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_j^n - U_{j-1}^n)$



$U_j^{n+1} = U_j^n (1 - \lambda) + \lambda U_{j-1}^n$ combinaison convexe par 0 < \lambda \le 1 (CFL!)

CFL : $L^2 \rightarrow$ von Neumann, $L^1, L^\infty \rightarrow$ combinaison convexe -

diffusion numérique : C'est aussi le schéma numérique d'une équation d'advection-diffusion avec un coef de diffusion d'origine numérique.